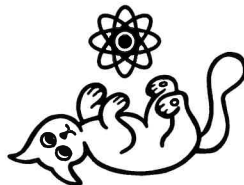


PLANCKS Preliminaries Austria 2023 Nationale Vorausscheidung PLANCKS 2023

Aufgaben gestellt von Univ.-Prof. Dipl.-Phys. Dr. Martin K. Beyer⁴,
Dr. Sebastian Grandis⁹, Dr. Markus Holler⁸,
assoz. Prof. Dr. Ralf Kissmann^{6,7}, Univ.-Prof. Dr. Tracy E. Northup⁵ und
Milan Ončák, PhD^{1,2,3}



organisiert von
StV-Physik Innsbruck
stv-physik-oeht@uibk.ac.at



25. März 2023



Regulatorien

- Es sind insgesamt 4 Stunden Bearbeitungszeit festgelegt.
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden, welches doppelseitig beschrieben werden kann. Sollte für die selbe Aufgabe ein zusätzliches Blatt benötigt werden, muss dies deutlich erkennbar sein.
- Jedes abgegebene Blatt muss mit dem Teamnamen und der Nummer der bearbeiteten Aufgabe gekennzeichnet sein.
- Es können bei den 9 Aufgaben insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Die zwei Teams mit den meisten Punkten werden für das Finale in Mailand nominiert. Beachte, dass es keine Mindestpunktzahl gibt.
- **Für die Abgabe bitte alle Seiten (auch die Angabe) in den Umschlag geben.**
- Für weitere Informationen und Regeln ist das Regelblatt zu konsultieren.

Name eures Teams _____

Frage	Punkte	Ergebnis
Ganz schön salzig	12	
Halb so salzig	12	
Reaktionskinetik	10	
Die fliegende Wäscheklammer	9	
Magnetism!	12	
Tolle Teilchen	14	
Löschen	8	
SN 1987A – SuperNova	10	
Geodesic equation and fictitious forces	13	
Σ	100	

**Aufgabe 1: Ganz schön salzig** **12 Punkte**

Das NaCl-Molekül entsteht aus Natrium- (Masse $22,99 \text{ g mol}^{-1}$) und Chlor-Atomen (Masse $35,45 \text{ g mol}^{-1}$), ein Elektron wird dabei fast völlig aus Na zu Cl transferiert. Die Bindungswechselwirkung kann man vereinfacht als ein Gleichgewicht zwischen der Coulomb-Wechselwirkung E_{Coulomb} und der Pauli-Repulsion E_{Pauli} (mit dem Na-Cl-Abstand r in $\text{Å} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$) beschreiben („ \approx “ ist das Zeichen für die Grenzwertnäherung):

$$E_{\text{Coulomb}} = -\frac{2120}{r} \text{ kJ/mol} \quad (1)$$

$$E_{\text{Pauli}} = 71100 \frac{\exp(-2,329r)}{r} \text{ kJ/mol} \approx \frac{8260}{r^4} \text{ kJ/mol} \quad (2)$$

- 1 (a) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen der Pauli-Repulsion und dem fermionischen Charakter der Elektronen.

Lösung

Die Fermionen dürfen sich nicht im gleichen Zustand befinden. Wenn zwei Atome zu nah zueinander kommen, sind die Elektronen gezwungen, in höhere Zustände zu gehen, deshalb die Repulsion.

- 2 (b) Bestimmen Sie die optimale Bindungslänge im NaCl-Molekül.

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dr} &= \frac{dE_{\text{Coulomb}}}{dr} + \frac{dE_{\text{Pauli}}}{dr} = \frac{2120}{r^2} - 4 \frac{8260}{r^5} = 0 \\ \frac{2120}{r^2} &= 4 \frac{8260}{r^5} \\ r^3 &= 4 \frac{8260}{2120} \\ r &= 2,50 \text{ Å} \end{aligned}$$

Hinweis Falls Sie die optimale Bindungslänge des Moleküls nicht rechnen konnten, nehmen Sie in den weiteren Aufgaben $r = 2,52 \text{ Å}$.

- 2 (c) Schätzen Sie die Ionisierungsenergie des NaCl-Moleküls.

Lösung



Das Elektron wird aus dem Cl^- -Ion genommen, man verliert nur die Coulomb-Wechselwirkung, also:

$$\Delta E_{\text{Ionisierung}} = -E_{\text{Coulomb}}(r_{\text{opt}}) = \frac{2120}{2,50} = 848 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

$$\Delta E_{\text{Ionisierung}} = -E_{\text{Coulomb}}(r_{\text{opt}}) = \frac{2120}{2,52} = 841 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

- 3 (d) In der harmonischen Näherung beschreibt man das Potential wie folgt:

$$E = \frac{1}{2} k x^2 \quad (3)$$

Bestimmen sie die Schwingungsfrequenz im NaCl -Molekül in der harmonischen Näherung.

Lösung

$$k = \left(\frac{d^2 E}{dr^2} \right)_{r_{\text{min}}} = -2 \frac{2120}{r^3} + 4 * 5 * \frac{8260}{r^6} = 405 \frac{\text{kJ}}{\text{mol} \text{Å}^2} \quad (\text{für } r = 2,50 \text{Å})$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{405 \frac{\text{kJ}}{\text{mol} \text{Å}^2}}{\frac{22,99 * 35,45 \text{ g}}{22,99 + 35,45 \text{ mol}}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{405000 * 10^{20} \frac{\text{J}}{\text{molm}^2}}{\frac{22,99 * 35,45}{22,99 + 35,45} * 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}} = 8,57 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

$$k = 380 \frac{\text{kJ}}{\text{mol} \text{Å}^2} \quad \text{für } r = 2,52 \text{Å} \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{380 \frac{\text{kJ}}{\text{mol} \text{Å}^2}}{\frac{22,99 * 35,45 \text{ g}}{22,99 + 35,45 \text{ mol}}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{380000 * 10^{20} \frac{\text{J}}{\text{molm}^2}}{\frac{22,99 * 35,45}{22,99 + 35,45} * 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}} = 8,31 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

- 1 (e) Betrachten wir jetzt eine unendlich lange Kette von NaCl -Dimeren, also ... Na-Cl-Na-Cl-Na-Cl ... Sollte der Abstand zwischen Na - und Cl -Ionen größer oder kleiner werden im Vergleich zum NaCl -Molekül? Warum?

Lösung

Der Abstand sollte größer sein, da die Wechselwirkung zwischen Na und Cl im Molekül durch die Anwesenheit anderer Ionen geschwächt wird. Oder genauer: Ein Na^+ -Ion in der Kette wechselt mit unendlich vielen zusätzlichen Na^+ -Ionen und unendlich vielen zusätzlichen Cl^- -Ionen. Der nächste Nachbar, der zusätzlich dazu kommt, ist für ein Na^+ -Ion ein



Cl^- -Ion. Dieses Cl^- -Ion zieht das Na^+ -Ion weg von dem ursprünglichen Cl^- -Ion aus dem Molekül. Neue Nachbarn mit doppeltem Abstand sind auf beiden Seiten ein Na^+ -Ion. Die Wechselwirkungen gleichen sich aus. Dann kommen mit dreifachem Abstand zwei Cl^- -Ionen, die Wechselwirkungen gleichen sich aus, usw. Für Cl^- gilt die Betrachtung analog. Auf beide Ionen aus dem ursprünglichen Molekül (Na^+ und Cl^-) wirkt also eine Nettokraft, die die beiden Ionen voneinander wegzieht.

- 3 (f) Bestimmen Sie den Abstand zwischen Na-Ionen und Cl-Ionen quantitativ (machen Sie geeignete Näherungen). Es gilt:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \quad (4)$$

Lösung

In der 1D-Kette gilt für ein Ion (die Pauli-Repulsion darf man ignorieren, wenn die Ionen keine Nachbarn sind, da sie schnell mit dem Abstand sinkt):

$$E_{\text{Coulomb}} = -\frac{2120}{r} * 2 * (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots) = -\frac{4240 \ln 2}{r} \text{kJ/mol}$$

$$E_{\text{Pauli}} \approx 2 * \frac{8260}{r^4} \text{kJ/mol}$$

$$\frac{dE}{dr} = \frac{dE_{\text{Coulomb}}}{dr} + \frac{dE_{\text{Pauli}}}{dr} = \frac{4240 \ln 2}{r^2} - 4 * 2 * \frac{8260}{r^5} = 0$$

$$\frac{4240 \ln 2}{r^2} = 4 * 2 * \frac{8260}{r^5}$$

$$r^3 = 4 * 2 * \frac{8260}{4240 \ln 2}$$

$$r = 2,82 \text{ \AA}$$


Aufgabe 2: Halb so salzig 12 Punkte

Wenn die Spin-Bahn-Kopplung gerechnet wird, löst man oft zuerst die Schrödinger-Gleichung für die Elektronen mit dem Hamiltonian \mathcal{H}_{el} , in dem die relativistischen Effekte ignoriert werden, und dann fügt man den Spin-Bahn-Teil \mathcal{H}_{SO} hinzu. Hier möchten wir die elektronische Struktur des Natrium-Atoms in den zwei stabilsten elektronischen Zuständen beschreiben. Im Grundzustand hat das Atom die elektronische Konfiguration von $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ ($L = 0, S = 1/2$), in dem ersten angeregten Zustand $1s^2 2s^2 2p^6 3p^1$ ($L = 1, S = 1/2$)

Für die ersten zwei elektronischen Zustände des Na-Atoms wurde die folgende Spin-Bahn-Kopplung-Matrix gerechnet (in cm^{-1})¹

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 15904,59 & 0 & ? & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 15904,59 & 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 3,86i & 0 & 15904,59 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & -3,86i & 0 & 15904,59 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,86 & 0 & 3,86i & 15904,59 & 0 \\ 0 & 0 & 3,86 & 0 & 3,86i & 0 & 0 & 15904,59 \end{pmatrix}$$

- 2 (a) Was koppelt in der Spin-Bahn-Kopplung in Atomen?

Lösung

Der Spin des Elektrons mit dem Bahndrehimpuls des Elektrons.

- 1 (b) Bei Atomen können wir auch die Hyperfeinstruktur beobachten, bei der man auch den Einfluss des Kerns berücksichtigen muss. Was koppelt dann?

Lösung

Der Gesamtdrehimpuls des Elektrons mit dem Gesamtdrehimpuls des Kerns.

- 2 (c) Erklären Sie, warum die Spin-Bahn-Kopplung-Matrix in unserem Fall eine 8x8-Matrix ist.

Lösung

Zwei Dimensionen für den Grundzustand ($M_L = 0; M_S = \pm 1/2$), sechs Dimensionen für den angeregten Zustand ($M_L = -1, 0, 1; M_S = \pm 1/2$).

¹ $i \in \mathbb{C}$ bezeichnet hier die imaginäre Einheit



- 2 (d) Bestimmen Sie die Werte in der Matrix, welche eingekastet [?] sind.

Lösung

Die Matrix ist hermitesch, also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15904,59 & 0 & -3,86i & 0 & 0 & 3,86 \\ 0 & 0 & 0 & 15904,59 & 0 & 3,86i & -3,86 & 0 \\ 0 & 0 & 3,86i & 0 & 15904,59 & 0 & 0 & -3,86i \\ 0 & 0 & 0 & -3,86i & 0 & 15904,59 & -3,86i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,86 & 0 & 3,86i & 15904,59 & 0 \\ 0 & 0 & 3,86 & 0 & 3,86i & 0 & 0 & 15904,59 \end{pmatrix}$$

- 1 (e) Zeichnen Sie das Absorptionsspektrum des Atoms, falls die Spin-Bahn-Kopplung ignoriert wird.

Lösung

Ein Signal bei $15\,904,59\text{ cm}^{-1}$

- 2 (f) Welche Werte des Gesamtdrehimpulses J entstehen, wenn die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigt wird?

Lösung

$J = 1/2$ im Grundzustand, $J = 1/2, 3/2$ im angeregten Zustand.

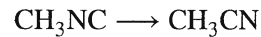
- 2 (g) Schätzen Sie das Absorptionsspektrum des Atoms, falls die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigt wird.

Lösung

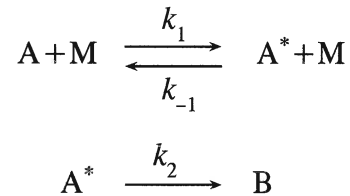
Zwei Signale um $15\,904,59\text{ cm}^{-1}$ (genau bei $15\,896,88\text{ cm}^{-1}$ und bei $15\,908,45\text{ cm}^{-1}$)

**Aufgabe 3: Reaktionskinetik** 10 Punkte

Die Kinetik der folgenden Reaktion ändert sich je nach Konzentration des Moleküls:



Man kann es dadurch erklären, dass die Moleküle zuerst die Energie durch einen Stoß mit einem anderen Molekül M erhalten (das Molekül „M“ könnte auch „A“ sein), und nur im zweiten Schritt in diesem angeregten Zustand reagieren:



- 3 (a) Schreiben Sie die kinetischen Gleichungen für die zeitliche Änderung der Konzentrationen von A, A* und B, folgend dem obigen Schema:

Lösung

$$\begin{aligned} -\frac{dA}{dt} &= k_1 AM - k_{-1} A^* M \\ \frac{dA}{dt} &= k_1 AM - k_{-1} A^* M - k_2 A^* \\ \frac{dB}{dt} &= k_2 A^* \end{aligned}$$

- 2 (b) Wir wollen die Gleichung für A* lösen. Dabei ist es vorteilhaft anzunehmen, dass wir uns in einem stationären Vorgang befinden, d.h. die Konzentration von A* ändert sich nicht mit Zeit. Welches Verhältnis zwischen Reaktionsraten muss in unserem Fall gelten, damit dieses wahr wäre? Was bedeutet das physikalisch?

Lösung

$$k_1 \ll k_2 + k_{-1}$$

Jedes A*-Molekül, das sich im angeregten Zustand befindet, reagiert gleich weiter zu B oder geht zurück zu A.



- 2 (c) Lösen Sie die Gleichung für die Konzentration von A^* mit der Annahme eines stationären Vorgangs.

Lösung

$$\frac{dA^*}{dt} = k_1 AM - k_{-1} A^* M - k_2 A^* = 0$$
$$k_{-1} A^* M + k_2 A^* = k_1 AM$$
$$A^* = \frac{k_1 AM}{k_{-1} M + k_2}$$

- 3 (d) Erklären Sie, warum man bei einem hohen Druck die Kinetik erster Ordnung für das Entstehen von B-Molekülen beobachtet (d.h. die Reaktionsgeschwindigkeit steigt linear mit der Konzentration des Reaktanden), und die Kinetik zweiter Ordnung bei einem kleinen Druck.

Lösung

$$\frac{dB}{dt} = k_2 A^* = \frac{k_1 k_2 AM}{k_{-1} M + k_2}$$

Bei einem hohen Druck gilt hat man viele Kollisionen, also $k_{-1} M \gg k_2$:

$$\frac{dB}{dt} = k_2 A^* = \frac{k_1 k_2 AM}{k_{-1} M} = \frac{k_1 k_2 A}{k_{-1}}$$

Bei einem kleinen Druck gilt hat man nicht so viele Kollisionen, also $k_{-1} M \ll k_2$:

$$\frac{dB}{dt} = k_2 A^* = \frac{k_1 k_2 AM}{k_2} = k_1 AM$$

**Aufgabe 4: Die fliegende Wäscheklammer** 9 Punkte

Wenn man eine flache Holzwäscheklammer mit starker Feder so auf den Tisch legt, dass die Feder parallel zur Tischoberfläche ist, kann man die Klammer durch die Luft schnippen: Man drückt mit einem Finger auf das Ende der Klammer, so dass die Feder maximal gespannt ist. Wenn man dann den Finger schnell wegzieht, fliegt die Klammer durch die Luft. Mal fliegt sie besonders hoch, mal besonders weit. Dazu die Aufgaben:

3

- (a) Erklären Sie, warum die Klammer abhebt. Was muss man machen, damit die Klammer besonders hoch oder besonders weit fliegt?

Lösung

Im Gedankenexperiment lässt sich der Finger instantan entfernen, ohne dass weitere Kräfte auf die Klammer wirken. Das Zuschlagen der Klammer ist vergleichbar mit dem Auftreffen einer starren Kugel, die auf den Tisch fällt. Bei vollkommen elastischem Verhalten führen die auf den Tisch und die Klammer wirkenden Kräfte zu einer elastischen Deformation der Körper, die Relaxation führt zu Kräften auf die Klammer, die dadurch nach oben beschleunigt wird. Möglichst hoch fliegt die Klammer, wenn sie sauber flach am Tisch aufliegt und die Bedingungen des Gedankenexperiments möglichst gut erfüllt sind. Im realen Experiment reibt der Finger an der Klammer, man kann beim Herunterdrücken der Klammer einen Schubs nach vorne geben, durch den die Klammer zum Weitsprung ansetzt. Ein weiterer Effekt ist, dass die Klammer beim Runterdrücken am anderen Ende leicht angehoben wird, so dass sie beim Zusammenschnappen nicht mehr flach auf dem Tisch aufliegt, sondern mit der anderen Kante aufsetzt. Der aus der Drehbewegung des oberen Teils der Klammer resultierende Drehimpuls versetzt die Klammer dann in Rotation. Insgesamt ist es beim Experiment schwer, eine reproduzierbare Flugbahn zu erzielen, weil verschiedene Kräfte auf die Klammer wirken und das Wegziehen des Fingers nicht immer gleich gelingt.

3

- (b) Identifizieren Sie die Parameter, die den Flug der Klammer beeinflussen.

Lösung

Da die Masse des Tisches groß gegenüber der Masse der Klammer ist, können Klammer und Tisch praktisch beliebig Impuls und Drehimpuls austauschen, so dass die entsprechenden Erhaltungssätze bei der quantitativen Analyse nicht weiterhelfen. Entscheidend ist, dass bei vollkommen elastischem Verhalten der beteiligten Körper die in der Feder gespeicherte Energie nach dem Aufprall auf den Tisch komplett in potentielle Energie der Klammer

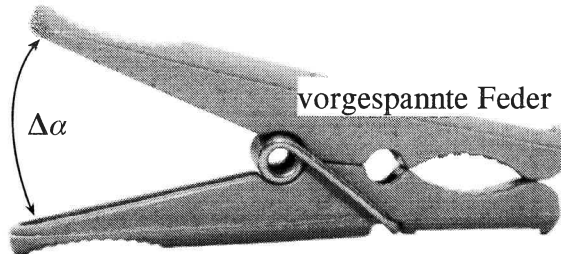
umgewandelt wird. Die relevanten Parameter sind demnach:

m Masse der Klammer

κ Federkonstante der Torsionsfeder

α Winkel, um den die Feder in der zugeklappten Klammer gespannt ist

$\Delta\alpha$ Winkel, um den die Feder beim Aufklappen der Klammer zusätzlich gespannt wird



3

- (c) Schätzen Sie, als Funktion der Parameter aus (b), die maximale Höhe h_{\max} ab, die die Klammer auf ihrem Flug erreichen kann.

Lösung

Die beim Losschnippen freigesetzte potentielle Energie der Klammer ist

$$\Delta U = \frac{1}{2}\kappa(\alpha + \Delta\alpha)^2 - \frac{1}{2}\kappa\alpha^2 = \frac{1}{2}\kappa(2\alpha\Delta\alpha + (\Delta\alpha)^2)$$

Die maximal erreichbare Höhe h_{\max} ergibt sich aus

$$mgh_{\max} = \Delta U = \frac{1}{2}\kappa(2\alpha\Delta\alpha + (\Delta\alpha)^2)$$

mit der bekannten Erdbeschleunigung g . Es fehlt nurmehr das Umformen.


Aufgabe 5: Magnetism! **12 Punkte**

It is possible to levitate a diamagnetic object in a magnetic field, that is, to suspend the object against the force of gravity. Pizza, a frog and even a mouse have been levitated in sufficiently high fields².

- 5 (a) Derive an approximate expression for the minimum magnetic field conditions required to levitate a homogeneous diamagnetic object of density ρ and magnetic susceptibility $\chi_m < 0$.

Hint: Recall that the energy density stored in a magnetic field is $\frac{B^2}{2\mu}$ and that $|\chi_m| \ll 1$, where B is the magnitude of the magnetic flux density and μ is the magnetic permeability. Useful expressions: $\mu = \mu_r \mu_0 = (1 + \chi_m) \mu_0$, where μ_r is the relative magnetic permeability, and μ_0 is the magnetic constant.

Lösung

We can write the energy stored in the object's volume V as

$$\begin{aligned} \frac{B^2}{2\mu} \cdot V &= \frac{B^2}{2(1 + \chi_m)\mu_0} \cdot V \\ &\approx \frac{B^2}{2\mu_0} (1 - \chi_m) \cdot V \\ &= \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V - \frac{\chi_m B^2}{2\mu_0} \cdot V, \end{aligned}$$

where we have Taylor-expanded the expression $(1 + \chi_m)^{-1}$. Here we see that the first term, $\frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V$, corresponds to the energy stored in a vacuum of volume V , while the second term, $-\frac{\chi_m B^2}{2\mu_0} \cdot V$, is due to the presence of the particle. Thus, in order to express the total energy U of the particle, we just need to add the gravitational energy to the second term:

$$U \approx -\frac{\chi_m B^2}{2\mu_0} \cdot V + \rho V g z,$$

where we have assumed that the gravitational acceleration g acts in the $-\hat{z}$ direction.

The gravitational force is compensated by the diamagnetic force when $\frac{dU}{dz} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= -\frac{\chi_m B}{\mu_0} \frac{dB}{dz} \cdot V + \rho V g = 0 \\ &\rightarrow \boxed{B \frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 \rho g}{\chi_m}} \end{aligned}$$

- 2 (b) Assume that a frog is levitated inside a solenoid, with the solenoid's axis parallel to the gravitational axis. Will the frog be located at the midpoint of the solenoid or closer to one end? Justify

²A. Geim, "Everyone's magnetism," *Physics Today* **51**, 36 (1998)



your answer.

Lösung

The frog will be closer to one end. The diamagnetic force is maximized when $B \frac{dB}{dz}$ is maximized, where z now refers to both the gravitational axis and the solenoid axis. The maximum value for B inside a solenoid is at its midpoint. However, this implies that the gradient $\frac{dB}{dz}$ is zero at the midpoint, and thus $B \frac{dB}{dz} = 0$. At the midpoint, there will be no diamagnetic force.

- 5 (c) Estimate the solenoid current I required to levitate a frog, if the solenoid has $N = 100$ windings and radius $R = 10$ cm much larger than the length of the solenoid. (In practice, levitation can only be achieved with a superconducting magnet, as will be clear from the result.)

Hint: The Biot-Savart law yields the following expression for the magnetic field along the solenoid axis \hat{z} :

$$B_z \approx \frac{\mu_0 I N R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Some approximate values: $\mu_0 \approx 1 \cdot 10^{-6}$ N/A², $g \approx 10$ m/s², $\rho \approx 1$ kg/cm³ for water, $\chi_m \approx -1 \cdot 10^{-5}$ for water and diamagnetics in general.

Lösung

Using the expression above for the short solenoid:

$$\begin{aligned} \frac{dB_z}{dz} &\approx -\frac{3}{2} \frac{2z\mu_0 I N R^2}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} \\ B_z \frac{dB_z}{dz} &\approx -\frac{3}{4} \frac{z(\mu_0 I N R^2)^2}{(R^2 + z^2)^4} \end{aligned}$$

We take the derivative of this expression with respect to z and set it to zero in order to find where $B_z \frac{dB_z}{dz}$ has a maximum. This yields the relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R^2 + z^2)^4} - \frac{4 \cdot 2z^2}{(R^2 + z^2)^5} &= 0 \\ \rightarrow R^2 + z^2 - 8z^2 &= 0 \\ \rightarrow z &= \frac{R}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$



Inserting this value into Eq. a and combining it with the answer to A:

$$\begin{aligned} B \frac{dB}{dz} &= \frac{\mu_0 \rho g}{\chi_m} \approx -\frac{3 (R/\sqrt{7})(\mu_0 I N R^2)^2}{4 (R^2 + R^2/7)^4} \\ &= -\frac{3 (\mu_0 I N)^2 R^5}{4\sqrt{7} (8R^2/7)^4} \\ &= -\frac{3}{4\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{(\mu_0 I N)^2}{R^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I &\approx \sqrt{-\frac{4\sqrt{7}}{3} \left(\frac{8}{7}\right)^4 \frac{\mu_0 \rho g R^3}{\chi_m (\mu_0 N)^2}} \\ &\approx 2 \sqrt{-\frac{\rho g R^3}{\chi_m \mu_0 N^2}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{-1 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2 \cdot 1 \cdot 10^4}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{10^1 \text{ kg/m}^3 \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}^3}{10^{-7} \text{ N/A}^2}} \\ &= 2 \sqrt{10^8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^2}{\text{N} \cdot \text{s}^2}} \\ &= 2 \cdot 10^4 \text{ A} = 20 \text{ kA} \end{aligned}$$

In practice, it would not be possible to dissipate the heat from so much current running through such a small solenoid. The conditions for levitation of small living beings can only be generated with powerful superconducting magnets.


Aufgabe 6: Tolle Teilchen 14 Punkte

Im interstellaren Medium treffen ständig hochenergetische Teilchen der kosmischen Strahlung auf thermische Teilchen des interstellaren Gases. Dabei werden in Kernreaktionen Pionen erzeugt, die wiederum in zwei Photonen zerfallen.

- 4 (a) Berechnen Sie die mindestens nötige Gesamtenergie eines Protons, die notwendig ist, damit in einer nuklearen Reaktion mit einem als ruhend angenommenen zweiten Proton ein neutrales Pion entstehen kann. Diese Energie wird auch als Schwellenergie bezeichnet.

Hinweis: Die Ruheenergien von Proton und Pion betragen: $m_p c^2 = 938,272 \text{ MeV}$ und $m_{\pi^0} c^2 = 134,977 \text{ MeV}$

Lösung

Die notwendige Gesamtenergie lässt sich relativ leicht bestimmen, wenn man bedenkt, dass der Betrag der gesamten Impulsvierervektoren lorentzinvariant ist:

$$\delta := \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i p_i c \right)^2 = \text{const.}$$

Vor der Reaktion haben wir im Laborsystem zwei Protonen mit:

$$\text{Proton 1: } E_1 = ? \quad p_1 = ?$$

$$\text{Proton 2: } E_2 = m_p c^2 \quad p_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s &= (E_1 + m_p c^2)^2 - p_1^2 c^2 \\ &= E_1^2 + m_p^2 c^4 + 2E_1 m_p c^2 - p_1^2 c^2 \\ &= \underbrace{E_1^2 - p_1^2 c^2}_{m_p^2 c^4} + 2E_1 m_p c^2 \\ &= 2m_p^2 c^4 + 2E_1 m_p c^2 \end{aligned}$$

Nach der Reaktion gilt, dass man im Schwerpunktsystem drei ruhende Teilchen hat (Schwellenergie):

$$\text{Proton 1 \& 2: } E_i = m_p c^2 \quad p_i = 0$$

$$\text{Pion: } E_3 = m_{\pi^0} c^2 \quad p_3 = 0$$

$$\Rightarrow \delta = (2m_p c^2 + m_{\pi^0} c^2)^2$$



Da s erhalten ist, folgt hier:

$$\begin{aligned}2m_p^2c^4 + 2E_1m_pc^2 &= (2m_pc^2 + m_{\pi^0}c^2)^2 \\ \Rightarrow E_1 &= \frac{1}{2m_pc^2} ((2m_pc^2 + m_{\pi^0}c^2)^2 - 2m_p^2c^4) \\ \Rightarrow E_1 &= 1217,9 \text{ MeV}\end{aligned}$$

2

(b) Wie schnell bewegt sich das Proton, bei dieser Energie im Laborsystem (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c)?

Lösung

Aus der Gesamtenergie folgt direkt der Gammafaktor im Laborsystem:

$$\gamma = \frac{E_1}{m_pc^2} = 1,298,$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \\ \beta &= \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 0,638\end{aligned}$$

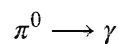
Das Proton fliegt mit ca. 68% der Lichtgeschwindigkeit.

2

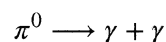
(c) Wieso kann ein neutrales Pion nicht nur in ein einzelnes Photon zerfallen?

Lösung

Da ein Proton masselos ist, kann die Reaktion



Die Energie- und Impulserhaltung nicht zugleich erfüllen. Das geht nur bei





- 3 (d) Nehmen Sie an, dass ein neutrales Pion gerade bei der Schwellenergie produziert wird. Berechnen Sie dessen kinetische Energie im Laborsystem.

Lösung

Nach der Erzeugung ruhen alle drei Teilchen im Schwerpunktsystem. Somit folgt für den gemeinsamen Gammafaktor:

$$E_{\text{total}}^{\text{Labor}} = E_1 + E_2 = E_1 + m_p c^2$$

$$E_{0,\text{total}} = 2m_p c^2 + m_{\pi^0} c^2$$

$$\Rightarrow \gamma_t = \frac{E_{\text{total}}^{\text{Labor}}}{E_{0,\text{total}}} = 1,072$$

und somit folgt für die kinetische Energie des Pions:

$$E_{\pi^0} = \gamma_t \cdot m_{\pi^0} c^2 = 144,7 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow E_{\text{kin},\pi^0} = (\gamma_t - 1)m_{\pi^0} c^2 = 9,71 \text{ MeV}$$

- 3 (e) Nun soll das Pion in zwei Photonen zerfallen, die im Ruhesystem des Pions senkrecht zu dessen Bewegungsrichtung im Laborsystem emittiert werden. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des einfallenden Protons und der Photonen.

Lösung

Jedes Photon hat also eine Energie von

$$E_\gamma = \frac{E_{\pi^0}}{2} = 67,5 \text{ MeV}$$

und es ergeben sich für die Viererimpulse

$$p_{\gamma_1}^{\mu*} = \left(67,5 \frac{\text{MeV}}{c}, 0, 67,5 \frac{\text{MeV}}{c}, 0 \right)$$

$$p_{\gamma_2}^{\mu*} = \left(67,5 \frac{\text{MeV}}{c}, 0, -67,5 \frac{\text{MeV}}{c}, 0 \right)$$

Am Beispiel des ersten braucht es nur die Lorentztransformation ins Laborsystem mit β_t :

$$\Rightarrow p_{\gamma_1}^{\mu} = (\gamma_t(p_0^* + \beta_t p_1^*), \gamma_t(p_1^* + \beta_t p_0^*), p_2^*, p_3^*)$$

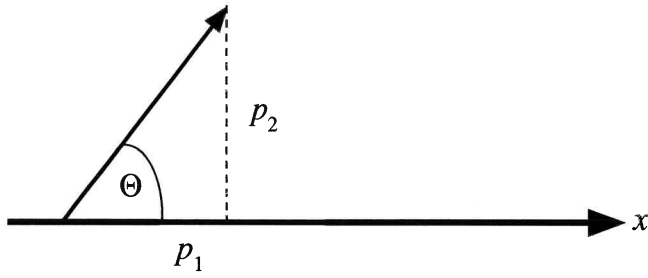
Relevant für den Winkel sind nur p_1 und p_2 :

$$p_1 = \gamma_t(p_1^* + \beta_t p_0^*) = \gamma_t \beta_t \frac{E}{c} = 26,05 \frac{\text{MeV}}{c}$$

$$p_2 = p_2^* = 67,5 \text{ MeV}/c$$



Und es folgt für den Winkel



$$\Theta = \arctan\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 68,9^\circ$$


Aufgabe 7: Löschen **8 Punkte**

Bei der Grundausbildung der Feuerwehr gibt es eine einfache Merkgel für den Durchfluss durch verschiedene Strahlrohre: ein C-Rohr mit Mundstück hat einen Durchfluss von 100 Litern pro Minute, eines ohne 200 Liter pro Minute. Analog hat man bei einem B-Rohr 400 Liter pro Minute mit und 800 ohne Mundstück.

Dabei wird im Hintergrund noch von verschiedenen ganzzahligen Drücken p_s im Schlauch ausgegangen.

Gehen Sie nun von folgenden Durchmessern d für die Öffnungen aus:

C-Rohr mit Mundstück: $d = 9 \text{ mm}$, $p_s = 4 \text{ bar}$

C-Rohr ohne Mundstück: $d = 12 \text{ mm}$, $p_s = 5 \text{ bar}$

B-Rohr mit Mundstück: $d = 16 \text{ mm}$, $p_s = 6 \text{ bar}$

B-Rohr ohne Mundstück: $d = 22 \text{ mm}$ $p_s = 7 \text{ bar}$

5

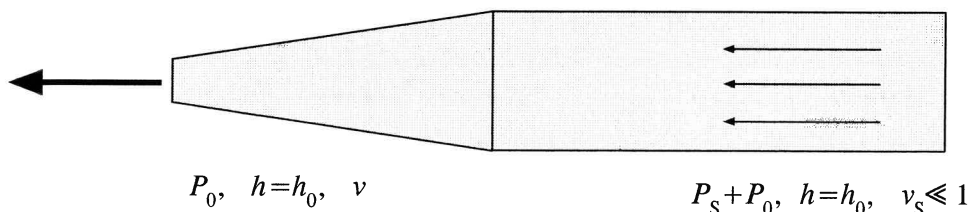
- (a) Berechnen Sie die tatsächliche Durchflussmenge für alle vier Fälle, indem Sie die Fließgeschwindigkeit im Schlauch selbst vernachlässigen.

Lösung

Gesucht ist der Durchfluss pro Minute. Dazu betrachtet man die Bernoulli-Gleichung, die die Energieerhaltung in Flüssigkeiten beschreibt.

$$\rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{const.}$$

Nun muss man diese Gleichung nutzen, um das Fluid im Schlauch vor dem Mundstück und beim Ausströmen hinter dem Mundstück zu vergleichen:



Durch die starke Reduktion des Durchmessers von Schlauch zum Strahlrohr kann man die Geschwindigkeit des Löschwassers im Schlauch vernachlässigen. Somit gilt

$$\rho gh_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + p_0 = \rho gh_0 + p_s + p_0$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = p_s \quad |)$$



Daraus muss nun der Durchfluss berechnet werden. Konkret wird dieser als Volumenstrom $Q = \dot{V}$ bezeichnet und ergibt sich zu $Q = vA = v\pi r_M^2$. Aus I) sieht man: $v = \sqrt{\frac{2p_s}{\rho}}$ und es folgt $Q = \pi r_M^2 \sqrt{\frac{2p_s}{\rho}}$. Da setzen wir jetzt die konkreten Werte ein. Im ersten Fall haben wir:

$$d_M = 9 \text{ mm} \implies r_M = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$p_s = 4 \text{ bar} = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\implies Q = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 108 \text{ l/m}$$

Analog folgt:

$$d_M = 12 \text{ mm } p_s = 5 \text{ bar} \implies Q = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 215 \text{ l/min}$$

$$d_M = 16 \text{ mm } p_s = 6 \text{ bar} \implies Q = 6,96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 418 \text{ l/min}$$

$$d_M = 22 \text{ mm } p_s = 7 \text{ bar} \implies Q = 14,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 853 \text{ l/min}$$

Damit passt die Merkregel zumindest grob.

- 3 (b) Argumentieren Sie, ob eine Berücksichtigung der Fließgeschwindigkeit im Schlauch den erwarteten Wert für den Durchfluss durch das Strahlrohr erhöht oder erniedrigt.

Lösung

Berücksichtigt man auch die Fließgeschwindigkeit im Schlauch, so steigt dort die gesamte Energiedichte. Damit ist ohne Rechnung klar, dass mehr Energie zur Verfügung steht. Diese kann nur in die kinetische Energie des aus dem Strahlrohr strömenden Wassers gehen, so dass der Durchfluss noch höher wird. Dabei haben wir aber Reibung komplett ignoriert...


Aufgabe 8: SN 1987A – SuperNova 10 Punkte

Am 24. Februar 1987 fand in der großen Magellanschen Wolke (Large Magellanic Cloud, LMC) eine Kernkollaps-Supernova statt. Bis heute handelt es sich dabei um die einzige Supernova in unserer Galaxie bzw. ihrer näheren Umgebung, die mit modernen Instrumenten beobachtet wurde. SN 1987A konnte von der Südhalbkugel mit bloßem Auge gesehen werden und wurde sogar von drei verschiedenen Neutrino-Detektoren beobachtet; einer davon war Kamiokande II.

Event number	Event time (sec)	Number of PMT's (N_{hit})	Electron energy (MeV)
1	0	58	$20,0 \pm 2,9$
2	0,107	36	$13,5 \pm 3,2$
3	0,303	25	$7,5 \pm 0,2$
4	0,324	26	$9,2 \pm 2,7$
5	0,507	39	$12,8 \pm 2,9$
6	0,686	16	$6,3 \pm 1,7$
7	1,541	83	$35,4 \pm 0,8$
8	1,728	54	$21,0 \pm 4,2$
9	1,915	51	$19,8 \pm 3,2$
10	9,219	21	$8,6 \pm 2,7$
11	10,433	37	$13,0 \pm 2,6$
12	12,439	24	$8,9 \pm 1,9$

Die obige Tabelle zeigt die Ankunftszeiten von Neutrino-Kandidatenereignissen (Events) von SN 1987A, gemessen mit Kamiokande II (Quelle: Hirata et al. (1987)). Die Zeitpunkte sind dabei relativ zum ersten Event gegeben. Die statistisch Analyse wurde mit Zeitschritten der Länge 10 s durchgeführt, wobei zusätzlich nur Events mit $N_{\text{hit}} \geq 30$ berücksichtigt werden. Für die obigen Daten ergeben sich damit $n_{\text{cand}} = 6$ Ereignisse in den ersten 10 s. Die mittlere Rate an Untergrundereignissen pro 10-s-Zeitfenster mit $N_{\text{hit}} \geq 30$ beträgt lediglich $\bar{n} = 0.0121$. Dadurch dass es sich um voneinander unabhängige Ereignisse handelt sind diese Poisson-verteilt, wobei die Wahrscheinlichkeit für k Ereignisse bei einer Grundwahrscheinlichkeit λ folgendermaßen gegeben ist:

$$P_k^\lambda = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad (5)$$

BITTE WENDEN



- 3 (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, aus dem gegebenen Untergrund \bar{n} zufällig $n_{\text{cand}} = 6$ zu erhalten. Wie lange müsste man im Mittel darauf warten?

Lösung

$$n_{\text{cand}} = 6, \bar{n} = 0,0121, t_{\text{Bin}} = 10 \text{ s}$$

$$\lambda = \bar{n}, k = n_{\text{cand}}$$

$$\Rightarrow P_6^{0,0121} = 4,31 \cdot 10^{-15}$$

Mittlere Wartezeit:

$$\bar{t} = \frac{1}{P_6^{0,0121}} t_{\text{Bin}} = 2,32 \cdot 10^{15} \text{ s} \approx 7,4 \cdot 10^7 \text{ yr}$$

- 3 (b) Ist es gerechtfertigt größere Ereigniszahlen (also $n_{\text{cand}} > 6$) in der Abschätzung aus (a) zu vernachlässigen?

Lösung

Berechne exemplarisch

$$P_6^{0,0121} = 7,44 \cdot 10^{-18} \ll P_6^{0,0121} \text{ (höhere Ordnungen nochmal deutlich niedriger)}$$

 \Rightarrow Kumulative Wahrscheinlichkeit mit $n_{\text{cand}} \geq 6$ gut durch $n_{\text{cand}} = 6$ beschrieben.

Nun kann man sich sicher sein, dass die $n = 12$ von Kamiokande II gemessenen Neutrino-Kandidaten tatsächlich von SN 1987A emittierte Neutrinos sind. Der Abstand zur LMC beträgt $d \approx 48 \text{ kpc}$, wobei $1 \text{ pc} = 3,09 \cdot 10^{16} \text{ m}$. Gehen Sie außerdem von einem totalen Wirkungsquerschnitt von $\sigma_{\text{tot}} = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ für den gesamten Detektor aus.

- 4 (c) Schätzen Sie die Gesamtzahl der von der Supernova emittierten Neutrinos ab.

LösungNun $n = 12$ (also ohne $N_{\text{Hit-Cut}}$)

$$d = 48 \text{ kpc}, 1 \text{ pc} = 3,09 \cdot 10^{16} \text{ m}, \sigma_{\text{tot}} = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$$

Gesamte Neutrinos bei isotroper Abstrahlung und gegebenem Abstand auf $A = 4\pi d^2$ verteilt. Mit der totalen Wechselwirkungsfläche σ_{tot} ergibt sich:

$$N_{\text{tot}} = \frac{A}{\sigma_{\text{tot}}} n = \frac{4\pi d^2}{\sigma_{\text{tot}}} n = 2,76 \cdot 10^{56}$$



(bzw. 3x mehr wenn man berücksichtigt dass nur $\bar{\nu}_e$ detektiert werden, aber alle Flavors in der SN erzeugt werden.)


Aufgabe 9: Geodesic equation and fictitious forces 13 Punkte

Consider the coordinate transformation induced by adopting a homogeneously accelerating reference frame, that is $t' = t$, and $l' = l - \frac{1}{2}at^2$, for $a \neq 0$ and real.

- 5 (a) If the $y^\mu = (t, l)^T$ has a Minkowsky metric, what metric does $x^\mu = (t', l')^T$ have?

Lösung

The Minkowsky metric is given by

$$\eta_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

and the metric induced by a coordinate transformation $y^\mu \mapsto x^\mu$, is given by

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu} \eta_{\rho\sigma},$$

if $\eta_{\rho\sigma}$ is the metric of y^μ , where we also use Einsteins summation notation.

For later use, consider that $t = t'$ and $l = l' + \frac{1}{2}at^2$, and thus

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^0}{\partial x^0} &= \frac{\partial t}{\partial t'} = 1 \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^0} &= \frac{\partial l}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} \left(l' + \frac{1}{2}at^2 \right) = at \\ \frac{\partial y^0}{\partial x^1} &= \frac{\partial t}{\partial l'} = 0 \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^1} &= \frac{\partial l}{\partial l'} = 1. \end{aligned}$$

For the components of the metric $g_{\mu\nu}$ we then have

$$\begin{aligned} g_{00} &= \frac{\partial y^\rho}{\partial x^0} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^0} \eta_{\rho\sigma} = \frac{\partial y^0}{\partial x^0} \frac{\partial y^0}{\partial x^0} \eta_{00} + \frac{\partial y^1}{\partial x^0} \frac{\partial y^1}{\partial x^0} \eta_{11} = -c^2 + (at)^2 \\ g_{01} &= \frac{\partial y^\rho}{\partial x^0} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^1} \eta_{\rho\sigma} = \frac{\partial y^0}{\partial x^0} \frac{\partial y^0}{\partial x^1} \eta_{00} + \frac{\partial y^1}{\partial x^0} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \eta_{11} = 0 + at = at = g_{10} \\ g_{11} &= \frac{\partial y^\rho}{\partial x^1} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^1} \eta_{\rho\sigma} = \frac{\partial y^0}{\partial x^1} \frac{\partial y^0}{\partial x^1} \eta_{00} + \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \eta_{11} = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Thus,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 + a^2 t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix}.$$



- 4 (b) Compute the Christoffel symbols

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) \quad (6)$$

for the above derived metric $g_{\mu\nu}$.

Lösung

First, note that $g^{\lambda\rho}$ is the inverse of $g^{\lambda\rho}$, and the inverse of a 2d matrix is given by

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

which directly means that

$$g^{\lambda\rho} = \frac{1}{a^2 t^2 - c^2 - a^2 t^2} \begin{pmatrix} 1 & -at \\ -at & a^2 t^2 - c^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-c^2} \begin{pmatrix} 1 & -at \\ -at & a^2 t^2 - c^2 \end{pmatrix}.$$

Also for later use, consider that

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} &= \frac{\partial}{\partial t} (a^2 t^2 - c^2) = 2a^2 t \\ \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} &= \frac{\partial}{\partial t} (at) = a = \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} \\ \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^1} &= 0 \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{\sigma}} &= 0. \end{aligned}$$

Plugging this into the equation for the Christoffel symbols, one readily finds

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \left[g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) + g^{01} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-c^2} 2a^2 t + \frac{-at}{-c^2} 2a \right] = 0 \\ \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} \left[g^{00} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} \right) + g^{01} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-c^2} (a - a) \right] = 0 = \Gamma_{01}^0 \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} \left[g^{00} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) + g^{01} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \right] = 0 \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \left[g^{10} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) + g^{11} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \right] = \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-at}{-c^2} 2a^2 t + \frac{a^2 t^2 - c^2}{-c^2} 2a \right] = \frac{1}{2} 2a = a$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} \left[g^{10} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} \right) + g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} \right) \right] = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left[g^{10} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) + g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \right] = 0$$

In summary, all Christoffel symbols except $\Gamma_{00}^1 = a$ vanish.

4

- (c) Considering the geodesic equation, which determines the trajectory of a geodesic $x^\mu(\lambda)$, given by

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\sigma\tau}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\tau}{d\lambda}, \quad (7)$$

provide a physical interpretation for the right hand side.

Lösung

For the time component, we find

$$\frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} = \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = 0,$$

which means that $t(\lambda) = m\lambda + t_0$. We can thus easily use the time t to parametrize the geodesic path.

Transforming the space part with derivatives w.r.t. time t , we find

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} = -\Gamma_{00}^1 \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} = -a.$$

Even in absence of external forces, particles on geodesics experience an acceleration of equal amplitude and opposite sign to the acceleration of the reference frame. In classical terms, this is the inertial force, which is a fictitious force. The right hand side of the geodesic equation indeed describes all the fictitious forces caused by the metric, including gravity!